Kísérlettervezés (kiegészítő anyag)

Adatelemzés – elméleti ismeretek

Valószínűségszámítási alapfogalmak

- Valószínűségi változó (*random variable*): X
- Várható érték, átlag (*expected value*, *average*, *mean*):

$$\mu = \mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

- Szórásnégyzet (*variance*):

$$\sigma^2 = \mathbb{E}\left(X-\mu\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i-\mu)^2$$

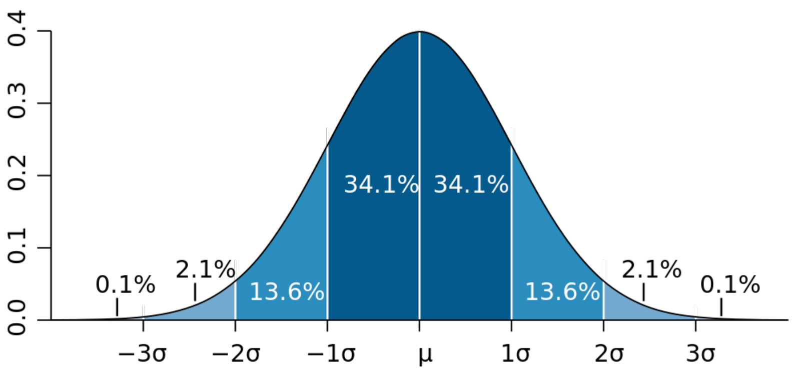
- Szórás (*standard deviation*):

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{E}\left(X-\mu\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i-\mu)^2}$$

Konfidencia – normális eloszlás

A normális eloszlású változó

- az esetek 68%-ában legfeljebb 1σ messze kerül μ-től,
- az esetek 95%-ában legfeljebb 2σ messze kerül μ-től,
- az esetek 99,7%-ában legfeljebb 3σ messze kerül μ-től.



1. ábra. Konfidenciaintervallumok

Statisztikai alapfogalmak

- Megfigyelések: t darab, $x_1, \ldots, x_t$
- Tapasztalati átlag (*sample mean*):

$$m = \bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_t}{t}$$

- Korrigált tapasztalati szórás (*unbiased sample standard deviation*):

$$s = \sqrt{\frac{(x_1-m)^2 + \cdots + (x_t-m)^2}{t-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{t}(x_i-m)^2}{t-1}}$$

Figyeljük meg, hogy a korrigált tapasztalati értékeknél t helyett $(t-1)$-gyel osztunk. Ennek oka, hogy t-vel osztva a kapott érték általában alábecsli a teljes populáció szórását. Belátható, hogy $(t-1)$-gyel osztva a valódi szórást jobban közelítő értéket kapunk. Ezt nevezzük Bessel-féle korrekciónak (`https://en.wikipedia.org/wiki/Bessel's_correction`).

Kísérlettervezés

A centrális határeloszlás-tételből (*central limit theorem*) következik, hogy tetszőleges eloszlású jellemző (véges μ várható értékkel és σ szórással) tapasztalati átlaga (m valószínűségi változó) $t \to \infty$ esetén normális eloszlású, μ várható értékkel és $\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{t}}$ szórással (ahol σ a megfigyelés alatt álló valószínűségi változó szórása).
Ökölszabály: ismert szórásnál $t > 30$ után kezd elfogadható lenni ez a közelítés.
A fentiek miatt a megfigyeléseink kiértékeléséhez használhatjuk a normális eloszláshoz tartozó konfidenciaintervallumokat. Eszerint m 68%-os valószínűséggel maximum σ_m távolságra esik μ-től. Tehát (ha m-et és σ_m-et ismerjük, és μ-t szeretnénk ez alapján becsülni) μ értékéről kijelenthetjük, hogy

- 68% valószínűséggel $m - \sigma_m$ és $m + \sigma_m$ közé esik, valamint ehhez hasonlóan
- 95% valószínűséggel $m - 2\sigma_m$ és $m + 2\sigma_m$ közé esik,
- és 99,7% valószínűséggel $m - 3\sigma_m$ és $m + 3\sigma_m$ közé esik.

Sokszor azonban σ nem ismert (a mérésekre azért van szükség, hogy becsléseket kaphassunk μ és σ értékére), ekkor elfogadható a $\sigma_m \approx \frac{s}{\sqrt{t}}$ (ahol s a korrigált tapasztalati szórás), amennyiben $t \geq 100$.

1. Kísérlet kiértékelése

Infrastruktúránk méretezését megnehezíti, hogy egy adott feladattípus végrehajtási ideje a körülmények függvényében ingadozik, például lapozás, memória szemétgyűjtés, memória cache találatok stb. változékonysága folytán. Ezért összeállítottunk egy valós munkaterhelést jól jellemző benchmarkot, és ennek többszöri lefuttatása során a futási időket átlagolva szeretnénk meghatározni a rendszer átlagos teljesítményét.

a) Az első tíz futtatás eredményei: 37 s, 34 s, 35 s, 39 s, 57 s, 41 s, 36 s, 35 s, 61 s, 35 s. Mennyi ez alapján a rövid kísérlet alapján a tapasztalati átlag és tapasztalati szórás?
b) Nagyobb léptékben futtatva a kísérletet, a benchmark 10 000 futtatása átlagban 44,3 másodpercig tartott, 11,6 másodperc tapasztalati szórással. Mennyire lehetünk biztosak a kapott eredmény pontosságában?

2. Kísérlettervezés

Egy modellezett folyamat átbocsátóképességére szimuláció alapján szeretnénk egy közelítő értéket és hozzá tartozó konfidencia-intervallumot meghatározni.

a) Hány szimuláció mérési eredményeiből számoljunk átlagot?
b) Az így elvégzett mérési eredmények tapasztalati közepe 500 kérés/s; a tapasztalati szórás 10%. Szeretnénk, hogy 95% konfidencia mellett egy legfeljebb 40 kérés/s széles intervallumba essen az átbocsátóképesség. Hány mérést végezzünk még?